III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Jelöljük a_n-nel az A^n mátrix elemeinek összegét, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $a_n = 4n^2 + 5n + 3$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Határozd meg az $\alpha \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} - \alpha n) = \frac{5}{4}.$$

2. feladat. Adott az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgy, hogy $a_0 > 0$ és

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Mutasd ki, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan növekvő és nem korlátos!

b) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

c) Számítsd ki: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^3}{n}$ értékét!

3. feladat. Két játékos a következő játékot játssza: egy 5×5-ös „sakktábla” minden mezőjére felváltva, egy-egy számkártyát helyeznek el az 1-től 25-ig számozott számkártyák közül. A játék akkor ér véget, mikor mind a 25 számkártyát elhelyezték a táblán. A játékot a kezdő játékos nyeri meg, ha a tábla négy szimmetriatengelyének mindegyikén az őket fedő számkártyák összege (ez négy darab összeget jelent) osztható 13-mal, ellenkező esetben a második játékos nyer. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája és mi a nyerőstratégia?

4. feladat. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ két olyan mátrix, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$AB = BA, \quad \det(A^2 - B^2) > 0, \quad \det A > 0 \quad \text{és} \quad \det B > 0.$$

Igazold, hogy

a) $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$;

b) $\dfrac{1}{\det(A + B)} + \dfrac{1}{\det(A - B)} \geq \dfrac{2}{\det A + \det B}$.

Megjegyzés: Minden feladat kötelező, munkaidő: 3 óra.